

Θ. Euler
 Π.Χ.Να δείξετε ότι ο $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ παριστά στροφή ως

προς οριζόντιο καθετο άξονα

Α ορθογώνιος και $\det A = 1$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ ορθογώνιος } A \cdot A^t = I, \det \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right)^3 = 1$$

$$= \left(\frac{1}{3} \right)^3 \det \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^3$$

Από Θ. Euler $\Rightarrow \lambda_1 = 1 \Rightarrow V(1)$ ή ένα ιδιοδιάνυσμα ως 1

$$\left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} - I \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -5/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5x - y + 2z = 0 \Rightarrow y = -5x + 2z \\ 2x - 5y + z = 0 \Rightarrow 2x + 25x - 10z + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \Rightarrow x + 2x - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 27x - 9z = 0 \Rightarrow z = 3x$$

$$y = -5x + 6x = x$$

$$V(1) = \langle (x, x, 3x) \rangle = \langle (1, 1, 3) \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{11}} (1, 1, 3) \rangle$$

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} & G-S \end{matrix}$$

$$u_1 \perp u_2$$

$$u_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 - \frac{\langle u_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = (0, 0, 1) - 0 \cdot (1, -1, 0) - \frac{3}{11} (1, 1, 3) =$$

$$= \left(-\frac{3}{11}, -\frac{3}{11}, \frac{2}{11} \right)$$

$$\mathbb{R}^3 : \left\langle \frac{1}{\sqrt{11}} (1, 1, 3), \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}} (3, 3, -2) \right\rangle$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} & 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \\ 1/\sqrt{11} & -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \\ 3/\sqrt{11} & 0 & -2/\sqrt{22} \end{pmatrix} \quad \det P = 1$$

$$P^t \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5/6 & -\sqrt{11}/6 \\ 0 & \sqrt{11}/6 & -5/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$-\frac{5}{6} = \cos \phi \quad + \frac{\sqrt{11}}{6} = \sin \phi \Rightarrow \phi = \pi - \arccos\left(\frac{5}{6}\right)$$

ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ

Ορισμός: Μια ισομετρία μεταξύ δύο ευκλείδειων χώρων V και W είναι μια επί απεικόνιση $T: V \rightarrow W$ για την οποία ισχύει:

$$\langle v, v' \rangle = \langle T(v), T(v') \rangle' \quad \text{για } v, v' \in V$$

Εδώ: $\langle -, - \rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον V και $\langle -, - \rangle'$ $\Pi - \Pi - \Pi - W$

Εμείς θα μελετούσαμε γραμμικές ισομετρίες. Δεν είναι όλες οι ισομετρίες γραμμικές

Μια ισομετρία διατηρεί το μήκος αλλά και τις γωνίες

$$\cos \phi = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Πρόταση: Αν η $T: V \rightarrow W$ είναι μια επί ισομετρία, τότε θα είναι γραμμική και 1-1

Αποδ.

Ισομετρία $\Rightarrow 1-1$ $u \neq u' \Rightarrow 0 \neq \langle u-u', u-u' \rangle = \langle u, u \rangle - \langle u', u \rangle - \langle u', u \rangle + \langle u', u' \rangle = \langle Tu, Tu \rangle - \langle Tu', Tu \rangle - \langle Tu', Tu \rangle + \langle Tu', Tu \rangle = \langle Tu - Tu', Tu - Tu' \rangle \Rightarrow \|Tu - Tu'\| \neq 0 \Rightarrow Tu \neq Tu' \Rightarrow T$ είναι 1-1

Γραμμικότητα: $\langle T(au+u'), Tu' \rangle = \langle au+u', u' \rangle = a\langle u, u' \rangle + \langle u', u' \rangle = a\langle Tu, Tu' \rangle + \langle Tu', Tu' \rangle$. Αυτό ισχύει για όλα τα $a \in \mathbb{R}$ και $u, v, u' \in V \Rightarrow T(au+u') = aTu + Tu' \Rightarrow T$ γραμμική

Π.χ. Ο $\mathbb{R}^3$ είναι εξορισμένος με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο και με το ενόρμικο:

$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 8x_3y_3$. Δίνεται η απεικόνιση $T: (\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle')$ με τύπο:

$T(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_3}{2\sqrt{2}} \right)$. Να δείξετε ότι είναι ισομετρία

Λύση:

α) Πρέπει να δείξουμε ότι η απεικόνιση $\langle -, - \rangle'$ είναι εσωτερικό γινόμενο. Εξετάζουμε τις 4 ιδιότητες:

β) Η T είναι γραμμική. Για να είναι ισομετρία η T θα πρέπει να ισχύει $\langle u, v \rangle = \langle Tu, Tv \rangle'$

$$\begin{aligned} \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\ \langle Tu, Tv \rangle' &= \left\langle \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_3}{2\sqrt{2}} \right), \left(\frac{y_1}{2}, \frac{y_2}{\sqrt{2}}, \frac{y_3}{2\sqrt{2}} \right) \right\rangle' \\ &= 4 \frac{x_1y_1}{2 \cdot 2} + 2 \frac{x_2y_2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} + 8 \frac{x_3y_3}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \end{aligned}$$

Άρα T είναι ισομετρία

Πρόταση: Ο πίνακας μιας ισομετρίας $T: V^n \rightarrow W^n$ ως προς ορθοκανονικές βάσεις είναι ορθογώνιος. Επίσης κάθε ορθογώνιος πίνακας ορίζει ισομετρία.

Απόδ:

$T: V^n \rightarrow W^n$. Ας είναι ορθοκανονικές βάσεις $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ και $W = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$. Ας είναι A ο πίνακας της T ως προς τις προκύπτουσες βάσεις $A = (a_{ij})$

$$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{n1}w_n$$

$$T(v_i) = \underbrace{a_{i1}w_1}_{i\text{-στήλη}} + \underbrace{a_{i2}w_2}_{i\text{-στήλη}} + \dots + \underbrace{a_{in}w_n}_{i\text{-στήλη}}$$

(*)

$$T \text{ ισομετρία} \Leftrightarrow \langle T(v_i), T(v_j) \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$\langle T(v_i), T(v_j) \rangle = \langle a_{i1}w_1 + \dots + a_{in}w_n, a_{j1}w_1 + \dots + a_{jn}w_n \rangle =$$

$$= \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \langle a_{it}w_t, a_{js}w_s \rangle = \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n a_{it}a_{js} \langle w_t, w_s \rangle =$$

$$= \sum_{t=1}^n a_{it}a_{jt} = \text{γινόμενο της } i\text{-στήλης του } A \text{ με την } j\text{-στήλη του } A$$

Από (*) $\Rightarrow \sum_{t=1}^n a_{it}a_{jt} = 0$ όταν $i \neq j \Rightarrow$ Οι στήλες του A αποτελούν ορθοκανονική βάση

$\Rightarrow A$: ορθογώνιος

Μπορούμε να δείξουμε ότι αν ο πίνακας A μιας γραμμικής απεικόνισης T είναι ορθογώνιος ως προς ορθοκανονικές βάσεις τότε η T είναι ισομετρία.

Έστω $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ και $W = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$ ορθοκανονικές
και A ο πίνακας της απεικόνισης $T: V \rightarrow W$ ως προς αυτές
τις βάσεις. Θα δείξουμε ότι η T είναι ισομετρία.

$$T(v_i) = a_{i1}w_1 + \dots + a_{in}w_n$$

$$\langle T(v_i), T(v_j) \rangle' = \langle a_{i1}w_1 + \dots + a_{in}w_n, a_{j1}w_1 + \dots + a_{jn}w_n \rangle' =$$

$$= \text{Πινόμενο της } i\text{-στήλης με } j\text{-στήλη} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \langle v_i, v_i \rangle = 1 \\ \langle v_i, v_j \rangle = 0 \end{cases}$$

Δείχνουμε ότι $\langle T(v_i), T(v_j) \rangle' = \langle v_i, v_j \rangle$. Με τον ίδιο
τρόπο δείχνουμε ότι $\langle T(u), T(v) \rangle' = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V$. Αυτό
ισχύει διότι η T είναι γραμμική και το εσωτερικό γινόμενο
σέβεται τη γραμμικότητα.

$$u = b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n, \quad v = b'_1v_1 + b'_2v_2 + \dots + b'_nv_n$$

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{t=1}^n b_tv_t, \sum_{s=1}^n b'_sv_s \right\rangle = \sum_t \sum_s b_t b'_s \langle v_t, v_s \rangle =$$

$$= \sum_t \sum_s b_t b'_s \langle T v_t, T v_s \rangle' = \langle T u, T v \rangle' \Rightarrow \langle u, v \rangle = \langle T u, T v \rangle'$$

$\Rightarrow T$ είναι ισομετρία

Πρόταση: Δύο ισοδιάστατοι Ευκλείδειοι χώροι V και W είναι
ισομετρικά ισομόρφιοι. Δηλ. υπάρχει ισομορφισμός $T: V \rightarrow W$ ο
οποίος είναι ισομετρία.

Απόδ. Θεωρούμε ορθοκανονικές βάσεις $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ και
 $W = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$. Από τη γραμμική γινόμενα ότι υπάρχει
ισομορφισμός:

$$T: V \rightarrow W \text{ με τύπο } T(v_i) = w_i \text{ και } T(a_1v_1 + \dots + a_nv_n) = a_1w_1 + \dots + a_nw_n$$

Θα δείξουμε ότι η T είναι ισομετρία. Αρχεί να δείξουμε

ότι: $\langle v_i, v_j \rangle = \langle T v_i, T v_j \rangle'$. Από τον ορισμό της T

$$\text{Έχουμε: } \langle w_i, w_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} = \langle T v_i, T v_j \rangle' = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$= \langle v_i, v_j \rangle \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle = \langle Tv_i, Tv_j \rangle$$

και επειδή π είναι γραμμική έχουμε:

$$\langle v, u \rangle = \langle Tv, Tu \rangle \quad \forall v, u \in V \quad \text{δηλ. } \pi \text{ είναι ισομετρία}$$